JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 20, 286–303 (1975)

Globale klassische Lösungen des Cauchyproblems semilinearer parabolischer Differentialgleichungen

HARTMUT PECHER

Mathematisches Institut der Universität, D-3400 Göttingen, Bunsenstrasse 3-5, Bundesrepublik Deutschland

Communicated by the Editors

Received February 2, 1975

Es werden nichtlineare Differentialgleichungen der Form $(\partial u/\partial t) + Au = f(u)$ in $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ betrachtet. Dabei ist A ein positiv definiter elliptischer Differentialoperator $2m$-ter Ordnung und f eine nichtlineare glatte Funktion, die nicht schneller als $|u|^q$ wächst, wobei $q < 1 + [4m/(n-2m)]$ für $n > 2m$ und $q < \infty$ für $n \leqslant 2m$, und deren Ableitungen polynomiales Wachstum besitzen. Außerdem besitze f eine nichtpositive Stammfunktion. Unter diesen Voraussetzungen wird durch Betrachtung der zugehörigen Integralgleichung in $L^p(\mathbb{R}^n)$ und unter Benutzung der Sobolevräume gebrochener Ordnung die globale klassische Lösbarkeit des Cauchyproblems für glatte Anfangswerte gezeigt.

Einleitung und Notationen

Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Behandlung des Cauchyproblems für nichtlineare parabolische Differentialgleichungen der Form

$$(\partial u/\partial t) + Au = f(u)$$

in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, wobei A ein positiv definiter elliptischer Differentialoperator $2m$-ter Ordnung ist und f eine genügend glatte (im allgemeinen) nichtlineare Funktion.

Wir betrachten diese Differentialgleichung als Evolutionsgleichung im reellen Banachraum $L^p(\mathbb{R}^n)$ und zeigen zunächst in §2, daß unter Stetigkeits- und Lipschitzbedingungen an f eine lokale klassische Lösung des Cauchyproblems existiert (Satz 1). Dazu wird die Tatsache benutzt, daß $-A$ mit dem Definitionsbereich $H^{2m,p}(\mathbb{R}^n)$ eine analytische Halbgruppe erzeugt. Aus der Abschätzung der Größe des Existenzintervalls wird klar, daß für die globale Fortsetzbarkeit nur eine a-priori-Abschätzung für gewisse L^p-Normen höherer Potenzen von A nötig ist (Satz 2). Der erste Schritt hierzu ist eine Energieabschätzung in $L^2(\mathbb{R}^n)$, d.h. von $\| A^{1/2}u(t)\|_{L^2}$, die für

Funktionen f erbracht werden kann, die eine nichtpositive Stammfunktion besitzen. Ein linearer Term in u kann darüberhinaus in die Differentialgleichung ohne Einfluß auf die Regularitätseigenschaft eingeführt werden (Lemma 6). Unter Ausnutzung der Eigenschaften analytischer Halbgruppen (Lemma 2) und unter Benutzung der Einbettungssätze für Sobolevräume gebrochener Ordnung, wie sie etwa Peetre in [8] bewiesen hat (Lemma 1), gelingt es dann mit Hilfe der zugehörigen Integralgleichung, sukzessive L^p-Normen höherer Potenzen von A abzuschätzen und schließlich die globale klassische Lösbarkeit im $\mathbb{R}^n$ zu sichern, falls f einer Wachstumsbedingung $|f(u)| \leqslant c(|u| + |u|^\rho)$ mit einem $\rho < 1 + [4m/(n-2m)]$ für $n > 2m$ genügt. Die Ableitungen von f bis zu einer gewissen Ordnung sollen polynomiales Wachstum besitzen. Im Falle $n < 2m$ kann ρ beliebig gewählt werden (Satz 3). Ein wesentliches Hilfsmittel dabei ist die Charakterisierung des Definitionsbereichs gebrochener Potenzen von A, wie sie etwa von Kielhöfer in [5, 6] gegeben wurde (Lemma 3).

Anfangs-Randwertprobleme für Gleichungen obigen Typs wurden bisher unter Benutzung von C^α-Räumen schon ausführlich behandelt, insbesondere von Ladyženskaja-Solonnikov-Ural'ceva Gleichungen 2. Ordnung in [7] und die lokale Theorie von Sobolevskii in [9]. Weiterentwickelt wurde diese Theorie dann von Kielhöfer in [5, 6]. Von Wahl führte dann in [11] gebrochene Potenzen elliptischer Operatoren in C^α-Räumen ein und bewies mit Hilfe dieser Theorie unter gleichzeitiger Verwendung von L^p- und C^α-Räumen in [12] u.a. die klassische Lösbarkeit des Anfangs-Randwertproblems in beschränkten Gebieten von Gleichungen, die den oben betrachteten Typ umfassen, falls f einer Monotoniebedingung und der Wachstumsbedingung $|f(u)| \leqslant c\,|u|^{1+(4m/n)} + K$ genügt. Der Fortschritt der vorliegenden Arbeit besteht in einer Vereinfachung der Methode durch Vermeidung der C^α-Theorie, einem Verzicht auf die Monotoniebedingung an f und einer Abschwächung der Wachstumsbedingung an f, falls das reine Anfangswertproblem betrachtet wird.

Im folgenden sei $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}\colon t \geqslant 0\}$. Für ein Gebiet G verstehen wir unter $C^k(G)$ den Banachraum der (reellwertigen) Funktionen, die auf G k-mal stetig differenzierbar sind und deren sämtliche Ableitungen gleichmäßig beschränkt sind, entsprechend $C^\infty(G)$. Für einen Banachraum X ist $C^k([a, b], X)$ der Banachraum aller bis zur Ordnung k stetig differenzierbaren Abbildungen $u\colon [a, b] \to X$ mit der Norm

$$\sum_{i=0}^{k} \sup_{t\in[a,b]} \left\| \left(\frac{d^i}{dt^i} u\right)(t) \right\|_X .$$

$C^k_{\text{loc}}(G, C)$ ist einfach die Menge aller auf G k-mal differenzierbaren Funktionen mit Werten in $C \subset \mathbb{R}$, deren sämtliche Ableitungen stetig sind, $C^k_{\text{loc}}(G) := C^k_{\text{loc}}(G, \mathbb{R})$. $C^k_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, X)$ ist die Menge aller auf $\mathbb{R}^+$ k-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in X. $\mathscr{L}(X)$ beziechnet den Banachraum der linearen beschränkten Abbildungen von X in sich mit der Norm $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(X)}$. Es sei $D_j = (1/i)(\partial/\partial x_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, und für ein $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ ist $D^\alpha := \prod_{j=1}^n D^{\alpha_j}$. Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichnet D^k eine Distributionsableitung k-ter Ordnung. Für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leqslant p < \infty$ bezeichnen wir mit $H^{k,p}(\mathbb{R}^n) = H^{k,p}$ den Banachraum der Funktionen, die mit ihren Distributionsableitungen bis zur Ordnung k zur p-ten Potenz absolut integrabel sind mit üblicher Modifiktaion für $p = \infty$. $H^{0,p} = L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$. Das Skalarprodukt des Hilbertraums L^2 wird mit $(\cdot, \cdot)$ bezeichnet. Sind X_1, X_2 Banachräume, die stetig in X eingebettet sind, so kann man die Interpolationsräume $(X_1, X_2)_{\Theta,q}$, $0 < \Theta < 1$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ definieren (vgl. hierzu [8, S.281 ff.; 2, S.165 ff. und S.194]).

Dann sind die Sobolevräume gebrochener Ordnung für $k > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ gegeben durch

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p} = (L^p(\mathbb{R}^n), H^{N,p}(\mathbb{R}^n))_{k/N,p},$$

wobei $k < N \in \mathbb{N}$. Diese Definitionen ist unabhängig von N, und es ist $W^{k,p} = H^{k,p}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (siehe [8]). Kurz vor Fertigstellung dieser Arbeit erhielt ich von Herrn von Wahl Preprints zweier Arbeiten über semilineare parabolische Differentialgleichungen. In [13] wird die Regularität jeder schwachen Lösung des Rand-Anfangswertproblems für $u' + A(t)u + f(u) = 0$ gezeigt, falls $\|f(u)\|_{L^2}$ beschränkt und $n \leqslant 4m$ ist. In [14] wird sogar die Existenz von starken nicht klassischen Lösungen des Rand-Anfangswertproblems für obige Gleichung gezeigt, falls f Ableitung einer nichtnegativen Funktion ist und nicht stärker als $|u|^q$ mit $q < 2 + [4m/(n-2m)]$ für $n > 2m$ wächst. Das analoge Randwertproblem für semilineare elliptische Gleichungen für monoton wachsende Nichtlinearitäten, die für $n > 2m$ nicht schneller als $|u|^{1+[4m/(n-2m)]}$ wachsen, untersuchte von Wahl in [15].

1. Vorbereitungen

Es werden zunächst einige Einbettungssätze und Resultate über die Charakterisierung des Definitionsbereichs gebrochener Potenzen elliptischer Differentialoperatoren zusammengestellt.

SOBOLEVSCHER EINBETTUNGSSATZ (ES). (1) *Seien* $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $+\infty > p, q > 1, k > l, 1/q \geqslant (1/p) - [(k-l)/n]$, *dann ist* $H^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset H^{l,q}(\mathbb{R}^n)$ *mit einer stetigen Einbettung.*

(2) *Seien* $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $l > (n/p) + k$, $+\infty > p \geqslant 2$, *dann ist* $H^{l,p}(\mathbb{R}^n) \subset C^k(\mathbb{R}^n)$ *mit einer stetigen Einbettung.*

Beweis. Vgl. [1, Lemma 5, S.36].

Eine Verallgemeinerung auf Sobolevräume gebrochener Ordnung liefert

LEMMA 1. (1) *Es seien* $k > 0, 1 < p, q < \infty, 1/q = (1/p) - (k/n)$, *dann ist* $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ *mit einer stetigen Einbettung.*

(2) *Es seien* $k > l > 0$, $+\infty > p > 1$, $k > (n/p) + l$. *Dann ist* $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{l,\infty}(\mathbb{R}^n)$ *mit einer stetigen Einbettung.*

Beweis. Zu (1) vgl. [8, Théorème 8.1, S.301].

Zu (2) vgl. [8, Théorème 8.2, S.302]; sowie [5, Satz 5.3(b), (c)].

Im folgenden sei nun

$$\tilde{A} := \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

ein Differentialoperator mit folgenden Eigenschaften:

(1) $a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(2) $\tilde{A}$ formal selbstadjungiert.

(3) $\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) \zeta^\alpha \geqslant c_1 |\zeta|^{2m}$ für alle $x, \zeta \in \mathbb{R}^n$ mit $c_1 > 0$.

Als Operator in $L^p(\mathbb{R}^n)$ mit Definitionsbereich $D(\tilde{A}_p) = H^{2m,p}(\mathbb{R}^n)$ wird $\tilde{A}$ als $\tilde{A}_p$ bezeichnet.

Nach [5, S. 136 ff.] gibt es Konstanten $\delta, \Lambda_0 > 0$ derart, daß

$$\tilde{\Lambda} = \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad -(\pi/2) - \delta \leqslant \arg \lambda \leqslant (\pi/2) + \delta, \quad |\lambda| > \Lambda_0\}$$

in der Resolventenmenge von $-\tilde{A}_p$ liegt.

Durch Addition einer geeigneten positiven Konstanten C_0 zu $\tilde{A}_p$ kann erreicht werden, daß

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C}, -(\pi/2) - \delta \leqslant \arg \lambda \leqslant (\pi/2) + \delta\} \cup \{0\}$$

in der Resolventenmenge von $-A_p := -(\tilde{A}_p + C_0)$ liegt und daß gilt:

$$(|\lambda| + 1) \| u \|_{L^p} + \| u \|_{H^{2m,p}} \leqslant c_2 \|(A_p + \lambda)u\|_{L^p}$$

für $\lambda \in \Lambda$ und $u \in D(A_p) = H^{2m,p}$.

Weiter ist $D(A_p{}^k) = H^{2mk,p}$ für $k \in \mathbb{N}$, und es gilt:

$$c_3(k) \| u \|_{H^{2mk,p}} \leqslant \| A_p^k u \|_{L^p} \leqslant c_4(k) \| u \|_{H^{2mk,p}} .$$

Nach [3, Theorem 2.1, S.101] erzeugt $-A_p$ also eine analytische Halbgruppe $\{\exp(-tA_p)\}_{t\geqslant 0}$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Ferner können nach [3, Sektion 14, Part 2, S.158 ff.] gebrochene Potenzen A_p^γ, $\gamma \in \mathbb{R}$, gebildet werden, nämlich für $\gamma > 0$ durch die Definition

$$A_p^{-\gamma} := \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \exp(-sA_p)\, s^{\gamma-1}\, ds \qquad \text{und} \qquad A_p^\gamma := (A_p^{-\gamma})^{-1}.$$

Lemma 2. (1) *Es sei* $0 \leqslant \tilde{\gamma} \leqslant 1, 0 \leqslant \beta \leqslant \delta < 2, 0 \leqslant \delta - \tilde{\gamma} \leqslant 1$, $T > 0$. *Dann gilt für* $T \geqslant s \geqslant t \geqslant 0$:

$$\| A_p^{\tilde{\gamma}}(\exp(-tA_p) - \exp(-sA_p))\, A_p^{-\beta} \|_{\mathscr{L}(L^p)} \leqslant c_T(\beta, \tilde{\gamma}, \delta) \mid t - s \mid^{\delta-\tilde{\gamma}} t^{\beta-\delta}$$

mit einer von β, $\tilde{\gamma}$, δ *und* T *abhängigen Konstanten.*

(2) *Es sei* $0 \leqslant \beta \leqslant \tilde{\gamma} < 2$. *Dann ist für* $t \geqslant 0$

$$\| A_p^{\tilde{\gamma}} \exp(-tA_p)\, A_p^{-\beta} \|_{\mathscr{L}(L^p)} \leqslant \tilde{c}(\tilde{\gamma}, \beta) \mid t \mid^{\beta-\tilde{\gamma}}$$

mit einer Konstanten $\tilde{c} = \tilde{c}(\tilde{\gamma}, \beta)$.

Beweis. Vgl. [3, Lemma 14.1, S. 161] und [3, S. 160] oder [9, Theorem 2, S. 5].

Lemma 3. *Es sei* $0 < \gamma < 1$, $1 < p < \infty$. *Dann gilt*:

$$W^{s,p} \subset D(A_p^\gamma) \subset W^{s',p}, \qquad \textit{falls} \quad 0 < s' < 2m\gamma < s < \infty,$$

mit stetigen Einbettungen, d.h. es existieren Konstanten d_2, $d_3 > 0$ *mit*

$$c_5 \| u \|_{W^{s',p}} \leqslant \| A_p^\gamma u \|_{L^p} \qquad \textit{für} \quad u \in D(A_p^\gamma)$$

und

$$\| A_p^\gamma u \|_{L^p} \leqslant c_6 \| u \|_{W^{s,p}} \qquad \textit{für} \quad u \in W^{s,p}.$$

Beweis. Vgl. [5, Satz 5.3(a), S. 142; [6, Satz 3.1].

Im Falle $p = 2$ gilt ein etwas besseres Resultat, nämlich:

LEMMA 4. *$A_2^{\nu/2}$ ist für $\nu \in \mathbb{N}$ selbstadjungiert auf $D(A_2^{\nu/2}) = H^{\nu m}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt:*

$$c_7(\nu) \| u \|_{H^{\nu m}} \leqslant \| A_2^{\nu/2} u \|_{L^2} \leqslant c_8(\nu) \| u \|_{H^{\nu m}}$$

mit Konstanten $c_7(\nu)$, $c_8(\nu) > 0$.

Beweis. Vgl. hierzu [4, Sektion 3 Anfang] oder [10, S. 265].

2. LOKALE THEORIE

Seien $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p < \infty$ und $0 \leqslant \gamma < 1$ fest vorgegeben. Man betrachte dann eine Abbildung

$$M\colon D(A_p^k) \to D(A_p^{k-\gamma})$$

mit folgenden Eigenschaften:

I. Stetigkeitseigenschaft. Sei $\{u_n\}$ eine Folge aus $D(A_p^k)$, die in der Graphennorm von $D(A_p^k)$ gegen $u \in D(A_p^k)$ konvergiere. Dann gelte $M(u_n) \to M(u)$ in der Graphennorm von $D(A_p^{k-\gamma})$.

II. Lokale Lipschitzbedingung. Es gibt eine monoton nicht fallende Funktion $K(\cdot) \in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ mit folgender Eigenschaft:

$$\| A_p^{k-\gamma}(M(u) - M(v))\|_{L^p} \leqslant K(\| A_p^k u \|_{L^p} + \| A_p^k v \|_{L^p}) \| A_p^k(u - v)\|_{L^p}$$

für alle $u, v \in D(A_p^k)$.

III. Nullpunktseigenschaft. Es ist $M(0) = 0$.

DEFINITION. Sei $\varphi \in D(A_p^k)$. Unter einer k-regulären Lösung in L^p der Differentialgleichung

$$(d/dt)u + Au = M(u)$$

zum Anfangswert φ in $[a, b]$, $0 \leqslant a < b < \infty$ bzw. auf $\mathbb{R}^+$ verstehen wir eine Abbildung $u(\cdot) \in C^1([a, b], L^p)$ bzw. $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^p)$ mit:

$$u(a) = \varphi \qquad \text{bzw.} \qquad u(0) = \varphi,$$

u hat Werte in $D(A_p^k)$, $(d/dt)u$ in $D(A_p^{k-1})$.

Es ist

$$A_p^k u(\cdot) \in C^0([a, b], L^p) \qquad \text{bzw.} \qquad A_p^k u(\cdot) \in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^p),$$

$$A_p^{k-1} \left(\frac{d}{dt} u\right)(\cdot) \in C^0([a, b], L^p) \qquad \text{bzw.} \qquad A_p^{k-1} \left(\frac{d}{dt} u\right)(\cdot) \in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^p),$$

und es ist

$$(d/dt)u + A_p u = M(u) \quad \text{in} \quad [a, b] \quad \text{bzw. auf} \quad \mathbb{R}^+.$$

SATZ 1. *Sei $\varphi \in D(A_p^k)$, $t_1 \in \mathbb{R}^+$. Dann existiert auf dem Intervall $[t_1, t_1 + T_0]$ genau eine k-reguläre Lösung in L^p der Differentialgleichung*

$$(d/dt)u + Au = M(u)$$

zum Anfangswert φ, falls

$$T_0 := \min\left(1, \left[\frac{1-\gamma}{2\bar{c}_{t_1+1}K(2\,\| A_p^k\varphi \|_{L^p})}\right]^{1/(1-\gamma)}\right), \qquad \varphi \neq 0.$$

Dabei ist

$$\bar{c}_{t_1+1} = \max(c_{t_1+1}(1-\gamma, 1, 1+\epsilon), \qquad \tilde{c}(1, 1-\gamma)),$$

wobei c_{t_1+1} und $\tilde{c}$ die Konstanten aus Lemma 2 sind und sich ϵ aus dem Beweis ergibt.

Beweis. Wir betrachten die Integralgleichung

$$A_p^k u(t) = A_p^k \exp(-(t-t_1)\,A_p)\varphi + \int_{t_1}^{t} A_p^k \exp(-(t-s)\,A_p)\,M(u(s))\,ds.$$

Wir wenden das Verfahren der sukzessiven Approximation an und setzen dazu für $t \in [t_1, t_1 + T_0]$:

$$A_p^k u_1(t) := A_p^k \exp(-(t-t_1)\,A_p)\varphi,$$

$$A_p^k u_{n+1}(t) := A_p^k u_1(t) + \int_{t_1}^{t} A_p^k \exp(-(t-s)\,A_p)\,M(u_n(s))\,ds.$$

Es soll jetzt zunächst gezeigt werden, daß

$$A_p^k u_{n+1}(t) \in C^0([t_1, t_1 + T_0], L^p)$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Dazu bemerken wir, daß $A_p^k \exp(-(t-t_1)\,A_p)\varphi \in C^0([t_1, t_1 + T_0], L^p)$ gilt. Nehmen wir weiter an, es sei $A_p^k u_n(\cdot) \in C^0([t_1, t_1 + T_0], L^p)$. Dann ist wegen Voraussetzung I an M auch $A_p^{k-\gamma} M(u_n(\cdot)) \in C^0([t_1, t_1 + T_0], L^p)$. Weiter ist für $t, \bar{t} \in [t_1, t_1 + T_0]$, $\bar{t} > t$:

$$\Big\| \int_{t_1}^{t} A_p^k \exp(-(t-s)\,A_p)\,M(u_n(s))\,ds - \int_{t_1}^{\bar{t}} A_p^k \exp(-(\bar{t}-s)\,A_p)\,M(u_n(s))\,ds \Big\|_{L^p}$$

$$\leqslant \Big\| \int_{t_1}^{t} A_p^k \exp(-(t-s)A_p)\, M(u_n(s))\, ds$$

$$- \int_{t_1}^{t} A_p^k \exp(-(\bar{t}-s)A_p)\, M(u_n(s))\, ds \Big\|_{L^p}$$

$$+ \Big\| \int_{t}^{\bar{t}} A_p^k \exp(-(\bar{t}-s)A_p)\, M(u_n(s))\, ds \Big\|_{L^p}$$

$$\leqslant \Big\| \int_{t_1}^{t} A_p(\exp(-(t-s)A_p) - \exp(-(\bar{t}-s)A_p))\, A_p^{\gamma-1} A_p^{k-\gamma} M(u_n(s))\, ds \Big\|_{L^p}$$

$$+ \Big\| \int_{t}^{\bar{t}} A_p \exp(-(\bar{t}-s)A_p)\, A_p^{\gamma-1} A_p^{k-\gamma} M(u_n(s))\, ds \Big\|_{L^p}.$$

Nach Lemma 2 gilt nun (mit $\tilde{\gamma} = 1$, $\beta = 1-\gamma$, $\delta = 1+\epsilon$):

$$\| A_p(\exp(-(t-s)A_p) - \exp(-(\bar{t}-s)A_p))\, A_p^{\gamma-1} \|_{\mathscr{L}(L^p)}$$

$$\leqslant c_{t_1+1} \, | t-\bar{t} |^{\epsilon} \, | t-s |^{-(\gamma+\epsilon)},$$

wobei $\epsilon > 0$ so gewählt sei, daß $\gamma + \epsilon < 1$ sei, und auch

$$\| A_p \exp(-(\bar{t}-s)A_p)\, A_p^{\gamma-1} \|_{\mathscr{L}(L^p)} \leqslant \tilde{c} \, | \bar{t}-s |^{-\gamma}.$$

Damit wird

$$\Big\| \int_{t_1}^{t} A_p^k \exp(-(t-s)A_p)\, M(u_n(s))\, ds$$

$$- \int_{t_1}^{\bar{t}} A_p^k \exp(-(\bar{t}-s)A_p)\, M(u_n(s))\, ds \Big\|_{L^p}$$

$$\leqslant \bar{c}_{t_1+1} \int_{t_1}^{t} | t-\bar{t} |^{\epsilon} \, \| A_p^{k-\gamma} M(u_n(s)) \|_{L^p} \, | t-s |^{-(\gamma+\epsilon)}\, ds$$

$$+ \bar{c}_{t_1+1} \int_{t}^{\bar{t}} | \bar{t}-s |^{-\gamma} \, \| A_p^{k-\gamma} M(u_n(s)) \|_{L^p}\, ds$$

$$\leqslant \bar{c}_{t_1+1} \sup_{t_1 \leqslant s \leqslant t_1+T_0} \| A_p^{k-\gamma} M(u_n(s)) \|_{L^p}$$

$$\times \Big\{ | t-\bar{t} |^{\epsilon} \int_{t_1}^{t} | t-s |^{-(\gamma+\epsilon)}\, ds + \int_{t}^{\bar{t}} | \bar{t}-s |^{-\gamma}\, ds \Big\}$$

$$\leqslant \bar{c}_{t_1+1} \sup_{t_1 \leqslant s \leqslant t_1+T_0} \| A_p^{k-\gamma} M(u_n(s)) \|_{L^p}$$

$$\times \Big[| t-\bar{t} |^{\epsilon} \frac{1}{1-(\gamma+\epsilon)} \, | t-t_1 |^{1-(\gamma+\epsilon)} + \frac{1}{1-\gamma} \, | \bar{t}-t |^{1-\gamma} \Big].$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist nun $\sup_{t_1 \leqslant s \leqslant t_1+T_0} \|A_p^{k-\gamma} M(u_n(s))\|_{L^p}$ beschränkt, so daß mit $\bar{t} \to t$ die rechte Seite der Ungleichung gegen Null konvergiert, womit gezeigt ist

$$(A_p^k u_{n+1})(\cdot) \in C^0([t_1, t_1 + T_0], L^p).$$

Weiter gilt

$$\| A_p^k u_1(t)\|_{L^p} \leqslant \| A_p^k \varphi \|_{L^p}$$

und, ausgehend von

$$\| A_p^k u_n(t)\|_{L^p} \leqslant 2 \| A_p^k \varphi \|_{L^p} \qquad \text{für} \quad t \in [t_1, t_1 + T_0],$$

erhalten wir aus Voraussetzung II an M:

$$\begin{aligned}
&\| A_p^k u_{n+1}(t)\|_{L^p} \\
&\quad \leqslant \| A_p^k u_1(t)\|_{L^p} + \bar{c}_{t_1+1} \int_{t_1}^{t} | t - s |^{-\gamma} \| A_p^{k-\gamma} M(u_n(s))\|_{L^p} \, ds \\
&\quad \leqslant \| A_p^k u_1(t)\|_{L^p} + \bar{c}_{t_1+1} \int_{t_1}^{t} | t - s |^{-\gamma} K(\| A_p^k u_n(s)\|_{L^p}) \, \| A_p^k u_n(s)\|_{L^p} \, ds \\
&\quad \leqslant \| A_p^k \varphi \|_{L^p} + \bar{c}_{t_1+1} K(\sup_{t_1 \leqslant s \leqslant t_1+T_0} \| A_p^k u_n(s)\|_{L^p}) \sup_{t_1 \leqslant s \leqslant t_1+T_0} \| A_p^k u_n(s)\|_{L^p} \\
&\qquad \cdot \frac{1}{1-\gamma} | t - t_1 |^{1-\gamma} \\
&\quad \leqslant \| A_p^k \varphi \|_{L^p} + \bar{c}_{t_1+1} K(2 \| A_p^k \varphi \|_{L^p}) \, 2 \| A_p^k \varphi \|_{L^p} \frac{1}{1-\gamma} T_0^{1-\gamma} \\
&\quad \leqslant 2 \| A_p^k \varphi \|_{L^p} .
\end{aligned}$$

Nach einem geläufigen Konvergenzbeweis ist dann die Existenz einer Abbildung u: $[t_1, t_1 + T_0] \to L^p$ mit $u(t_1) = \varphi$ und Werten in $D(A_p^k)$ gesichert. Außerdem ist $A_p^k u(\cdot) \in C^0([t_1, t_1 + T_0], L^p)$, und u genügt in $[t_1, t_1 + T_0]$ der Integralgleichung. Anwendung von A_p^{-k} liefert dann

$$u(t) = \exp(-(t - t_1) A_p)\varphi + \int_{t_1}^{t} \exp(-(t - s) A_p) M(u(s)) \, ds.$$

Differentiation nach t liefert dann

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt}(t) = &- A_p \exp(-(t - t_1) A_p)\varphi + M(u(t)) \\
&- \int_{t_1}^{t} A_p \exp(-(t - s) A_p) M(u(s)) \, ds
\end{aligned}$$

und damit

$$(d/dt)u + A_p u = M(u).$$

Wegen der Stetigkeit von $A_p^{k-\gamma}M(u)$ und $A_p^k u$ folgt aus der Differentialgleichung $(d/dt)\, u(t) \in D(A_p^{k-1})$ und $(A_p^{k-1}(d/dt)u)(\cdot) \in C^0([t_1, t_1 + T_0], L^p)$, somit die Existenz einer k-regulären Lösung in L^p im Intervall $[t_1, t_1 + T_0]$.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, u und v seien k-reguläre Lösungen in L^p zum Anfangswert φ. Dann wird

$$\begin{aligned}
&\| A_p^k(u(t) - v(t))\|_{L^p} \\
&\quad \leqslant \int_{t_1}^{t} \| A_p \exp(-(t-s)\, A_p)\, A_p^{\gamma-1} \|_{\mathscr{L}(L^p)} \| A_p^{k-\gamma}(M(u(s)) - M(v(s)))\|_{L^p}\, ds \\
&\quad \leqslant \bar{c}_{t_1+1} \int_{t_1}^{t} | t-s |^{-\gamma} K(\| A_p^k u(s)\|_{L^p} + \| A_p^k v(s)\|_{L^p}) \\
&\qquad \times \| A_p^k(u(s) - v(s))\|_{L^p}\, ds \\
&\quad \leqslant \bar{c}_{t_1+1} \int_{t_1}^{t} | t-s |^{-\gamma} K(\sup_{t\in[t_1, t_1+T_0]} (\| A_p^k u(t)\|_{L^p} + \| A_p^k v(t)\|_{L^p})) \\
&\qquad \times \| A_p^k(u(s) - v(s))\|_{L^p}\, ds.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\| A_p^k(u(t) - v(t))\|_{L^p} \equiv 0$ in $[t_1, t_1 + T_0]$ und damit die Behauptung.

Aus Satz 1 folgt nun in bekannter Weise

SATZ 2. *Sei $T_1 > 0$ und u eine k-reguläre Lösung in L^p der Differentialgleichung $(du/dt) + Au = M(u)$ auf $[0, T_1]$ zum Anfangswert $\varphi \in D(A_p^k)$. Weiter sei $\| A_p^k u(t)\|_{L^p} \leqslant g_1(t) \in C_{\mathrm{loc}}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ in $[0, T_1]$. Dann existiert diese Lösung als k-reguläre Lösung in L^p global auf $\mathbb{R}^+$.*

LEMMA 5. *Es sei $f(\cdot) \in C_{\mathrm{loc}}^{2km+1}(\mathbb{R})$, und es gelte*

$$| f(s)| \leqslant \tilde{c}_0(| s | + | s |^{l_0}), \qquad | f^{(\tilde{m})}(s)| \leqslant \tilde{c}_{\tilde{m}}(1 + | s |^{l_{\tilde{m}}})$$

für $\tilde{m} \in \mathbb{N}$, $\tilde{m} \leqslant 2km + 1$ und für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{c}_{\tilde{m}} > 0$ und $l_0, l_{\tilde{m}} \in \mathbb{N}$. Dann erfüllt $M\colon u \mapsto f(u)$ die Voraussetzungen I, II, III *für $k \geqslant k_0(p, n) = [n/2mp] + 1$ (sogar mit $\gamma = 0$).*

Beweis. Es ist für $| \alpha | \leqslant 2mk$ und $u \in C_0^\infty$:

$$\| D^\alpha(f(u))\|_{L^p} \leqslant \sum_{\substack{j=0,\ldots,2km \\ d_1,\ldots,d_{2km}=0,\ldots,2km \\ \sum_{i=1,\ldots,2km} i d_i \leqslant 2km}} \| f^{(j)}(u)(Du)^{d_1} \cdots (D^{2km}u)^{d_{2km}} \|_{L^p}\,.$$

Weiter ist für $u, v \in C_0^\infty$:

$$\begin{aligned}
&\| A_p^k(M(u) - M(v))\|_{L^p} \\
&\quad \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant 2mk} \| D^\alpha(f(u) - f(v))\|_{L^p} \\
&\quad \leqslant \sum_{j, d_1, \ldots, d_{2km}} \| f^{(j)}(u)(Du)^{d_1} \cdots (D^{2km}u)^{d_{2km}} - f^{(j)}(v)(Dv)^{d_1} \cdots (D^{2km}v)^{d_{2km}} \|_{L^p} \\
&\quad \leqslant \sum_{j, d_1, \ldots, d_{2km}} \{\| f^{(j+1)}(\tilde{u}^{(j)})(u - v)(Du)^{d_1} \cdots (D^{2km}u)^{d_{2km}} \|_{L^p} \\
&\qquad + \| f^{(j)}(v)[(Du)^{d_1} - (Dv)^{d_1}](D^2u)^{d_2} \cdots (D^{2km}u)^{d_{2km}} \|_{L^p} \\
&\qquad + \cdots + \| f^{(j)}(v)(Dv)^{d_1} \cdots (D^{2km-1}v)^{d_{2km-1}}[(D^{2km}u)^{d_{2km}} - (D^{2km}v)^{d_{2km}}]\|_{L^p}\}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\tilde{u}^{(j)}$ ein Zwischenwert von u und v. Wegen $k > n/2mp$ gilt nach dem ES und Lemma 4: $D(A_p^k) = H^{2km,p} \subset C^0$ und damit wegen der Voraussetzungen an f:

$$\begin{aligned}
&\| A_p^k(M(u) - M(v))\|_{L^p} \\
&\quad \leqslant g_2(\| u \|_{C^0} + \| v \|_{C^0}) \\
&\qquad \cdot \Bigg\{\| u - v \|_{H^{2km,p}} + \sum_{\substack{d_1, \ldots, d_{2km} = 0, \ldots, 2km \\ 1 \leqslant \sum_{i=1,\ldots,2km} i d_i \leqslant 2km}} \{\| Du \|_{L^{p p_1^{(0)} d_1}}^{d_1} \cdots \| D^{2km}u \|_{L^{p p_{2km}^{(0)} d_{2km}}}^{d_{2km}} \\
&\qquad + [\| D(u - v)\|_{L^{p \tilde{p}_1^{(1)}}}(\| Du \|_{L^{p \tilde{\tilde{p}}_1^{(1)}(d_1 - 1)}}^{d_1 - 1} + \| Dv \|_{L^{p \tilde{\tilde{p}}_1^{(1)}(d_1 - 1)}}^{d_1 - 1}) \\
&\qquad \cdot \| D^2u \|_{L^{p p_2^{(1)} d_2}} \cdots \| D^{2km}u \|_{L^{p p_{2km}^{(1)} d_{2km}}}^{d_{2km}}] \\
&\qquad + \cdots + [\| Dv \|_{L^{p p_1^{(2km)} d_1}}^{d_1} \cdots \| D^{2km-1}v \|_{L^{p p_{2km-1}^{(2km)}}}^{d_{2km-1}} \\
&\qquad \times \| D^{2km}(u - v)\|_{L^{p \tilde{p}_{2km}^{(2km)}}}(\| D^{2km}u \|_{L^{p \tilde{\tilde{p}}_{2km}^{(2km)}(d_{2km} - 1)}}^{d_{2km} - 1} \\
&\qquad + \| D^{2km}v \|_{L^{p \tilde{\tilde{p}}_{2km}^{(2km)}(d_{2km} - 1)}}^{d_{2km} - 1})]\}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $g_2(\cdot) \in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$,

$$\sum_{i=1}^{2km} \frac{1}{p_i^{(l)}} = 1, \qquad \frac{1}{p_i^{(i)}} := \frac{1}{\tilde{p}_i^{(i)}} + \frac{1}{\tilde{\tilde{p}}_i^{(i)}}.$$

Nach ES gilt nun

$$H^{2km,p} \subset \bigcap_{\substack{i=1,\ldots,2km\\ l=0,\ldots,2km}}^{i\neq l} H^{i,pp_i^{(l)}d_i} \cap \bigcap_{l=1}^{2km} H^{l,p\tilde{p}_l^{(l)}d_l} \cap \bigcap_{l=1}^{2km} H^{l,p\tilde{\tilde{p}}_l^{(l)}d_l},$$

falls

$$\frac{1}{pp_i^{(l)}d_i} \geqslant \frac{1}{p} - \frac{2km-i}{n} = \frac{n-2km+pi}{pn},$$

$$\frac{1}{p\tilde{p}_l^{(l)}d_l} \geqslant \frac{1}{p} - \frac{2km-l}{n}, \qquad \frac{1}{p\tilde{\tilde{p}}_l^{(l)}d_l} \geqslant \frac{1}{p} - \frac{2km-l}{n}.$$

Für $pi < 2pkm - n$ können wir $p_i^{(l)} = \tilde{p}_i^{(i)} = \tilde{\tilde{p}}_i^{(i)} = \infty$ wählen und haben nur noch zu zeigen, daß $\sum_{pi\geqslant 2pkm-n} 1/p_i^{(l)} = 1$ gewählt werden kann.

Es muß nach obiger Vorschrift sein

$$\sum_{pi\geqslant 2pkm-n} \frac{1}{p_i^{(l)}} \geqslant \sum_{pi\geqslant 2pkm-n} \frac{d_i p(n-2pkm+pi)}{pn}$$

$$= \frac{p}{n} \sum_{pi\geqslant 2pkm-n} id_i + \frac{n-2pkm}{n} \sum_{pi\geqslant 2pkm-n} d_i \,.$$

Dies ist für $k > n/2mp$ aber nicht größer als

$$\frac{p}{n} \sum_{pi\geqslant 2pkm-n} id_i + \frac{n-2pkm}{n} \sum_{pi\geqslant 2pkm-n} \frac{id_i}{2km} = \frac{1}{2km} \sum_{pi\geqslant 2pkm-n} id_i \leqslant 1.$$

Damit folgt schließlich

$$\| A_p^k(M(u) - M(v))\|_{L^p} \leqslant g_3(\| u \|_{H^{2km,p}} + \| v \|_{H^{2km,p}}) \| u - v \|_{H^{2km,p}}$$

$$\leqslant g_4(\| A_p^k u \|_{L^p} + \| A_p^k v \|_{L^p}) \| A_p^k(u - v)\|_{L^p}$$

mit $g_3(\cdot), g_4(\cdot) \in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.

Hieraus folgt $M\colon D(A_p^k) \to D(A_p^k)$ sowie die Eigenschaften I und II. III ist offensichtlich erfüllt.

COROLLAR. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 5 existiert genau eine k-reguläre Lösung in L^p der Differentialgleichung $du/dt + Au = f(u)$ zu jedem Anfangswert $\varphi \in D(A_p^k)$ auf $[t_1, t_1 + T]$, $T \geqslant T_0$, und für $k \geqslant k_0(p, n)$, wobei $T_0 = T_0(p)$ durch Satz 1 gegeben ist.*

Beweis. Folgt aus Satz 1.

Bemerkung. Sei nun $\tilde{p} \in [2, \infty)$ und ein $\tilde{k} \geqslant k_0(\tilde{p}, n)$ gegeben und ist k hinreichend groß, dann ist die k-reguläre Lösung in L^p auf $[t_1, t_1 + T]$ auch $\tilde{k}$-reguläre Lösung in $L^{\tilde{p}}$ im gleichen Bereich (dieses folgt aus dem ES). Für $\tilde{p} = 2$ und $\tilde{k} \geqslant k_0(2, n) + 1$ folgt dann aus [10, Hs. 8], daß u eine klassische Lösung auf $[t_1, t_1 + T]$ ist.

3. A Priori Abschätzungen

Sei im folgenden $k \geqslant k_0(2, n) + 1 = [n/4m] + 2$, $p > n$. Dann gibt es nach dem Corollar zu Lemma 5 ein $T^* > 0$, so daß auf $[0, T^*]$ genau eine $(k + 1)$-reguläre Lösung in L^p der Differentialgleichung $(du/dt) + Au = f(u)$ zum Anfangswert $\varphi \in D(A_p^{k+1})$ existiert. f erfülle dabei die Voraussetzungen von Lemma 5, wobei k durch $k + 1$ ersetzt werde. Da $H^{2m(k+1),p} = D(A_p^{k+1}) \subset D(A_2{}^k) = H^{2mk,2}$ nach dem ES, so ist diese Lösung auch eine k-reguläre Lösung in L^2 und eine 1-reguläre Lösung in L^q für jedes $q \in [2, \infty)$. Sie ist außerdem klassisch. Um sie global fortsetzen zu können, ist nach Satz 2 eine a priori Abschätzung von $\| A_p^{k+1} u(t)\|_{L^p}$ auf $[0, T^*]$ zu erbringen.

Lemma 6. *Es erfülle f die Voraussetzungen von Lemma 5. Weiter gebe es ein $\tilde{d} \in \mathbb{R}$, so daß gilt:*

$$F(s) := \int_0^s (f(\sigma) + \tilde{d}\sigma)\, d\sigma \leqslant 0 \qquad \textit{fur alle} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt $\| A_2^{1/2} u(t)\|_{L_2}^2 \leqslant g_5(t) \in C_{\mathrm{loc}}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *für* $t \in [0, T^*]$.

Beweis. Skalarmultiplikation der Differentialgleichung mit u_t liefert

$$\begin{aligned}\| u_t \|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\| A_2^{1/2} u \|_{L^2}^2 &= (f(u) + \tilde{d}u, u_t) - \tilde{d}(u, u_t)\\ &\leqslant (f(u) + \tilde{d}u, u_t) + \bar{d}\| u \|_{L^2}^2 + \tfrac{1}{2}\| u_t \|_{L^2}^2\end{aligned}$$

mit einem $\bar{d} > 0$.

Integration über $0 \leqslant s \leqslant t$ ergibt

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(\| A_2^{1/2} u(t)\|_{L^2}^2 - \| A_2^{1/2}\varphi \|_{L^2}^2) &\leqslant \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{dt} F(u)\, dx\, ds + \bar{d} \int_0^t \| u(s)\|_{L^2}^2\, ds\\ &\leqslant -\int_{\mathbb{R}^n} F(\varphi)\, dx + \bar{d} \int_0^t \| u(s)\|_{L^2}^2\, ds.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Aus Lemma 6 folgt auch, daß es möglich ist, einen linearen Term in u in der Differentialgleichung zu ergänzen, ohne die Regularitätsergebnisse zu verändern.

SATZ 3. *A erfülle die Voraussetzungen von Sektion* 1. *Es sei* $k \in \mathbb{N}$, $p > n$, $k \geqslant [n/4m] + 2$, *vorgegeben. Weiter sei* $f(\cdot) \in C_{\mathrm{loc}}^{2(k+1)m+1}(\mathbb{R})$, *und es gelte*: $|f(s)| \leqslant \tilde{c}_0(|s| + |s|^\rho)$, $|f^{(\tilde{m})}(s)| \leqslant \tilde{c}_{\tilde{m}}(1 + |s|^{l_{\tilde{m}}})$ *für* $\tilde{m} \in \mathbb{N}$, $\tilde{m} \leqslant 2(k+1)m + 1$, *und für alle* $s \in \mathbb{R}$ *mit* $\tilde{c}_{\tilde{m}} > 0$ *und* $l_{\tilde{m}} \in \mathbb{N}$. *Dabei sei* $1 \leqslant \rho < 1 + [4m/(n-2m)]$, *falls* $n > 2m$ *und beliebig, falls* $n \leqslant 2m$. *Ferner sei* $F(s) := \int_0^s (f(\sigma) + \tilde{d}\sigma)\, d\sigma \leqslant 0$ *für alle* $s \in \mathbb{R}$ *für ein* $\tilde{d} \in \mathbb{R}$. *Dann existiert genau eine* $(k+1)$-*reguläre Lösung in* L^p *der Differentialgleichung* $(du/dt) + Au = f(u)$ *auf* $\mathbb{R}^+$ *zum Anfangswert* $\varphi \in D(A_p^{k+1})$.

Beweis. Wie schon bemerkt, genügt es, eine a priori Abschätzung von $\| A_p^{k+1}u(t)\|_{L^p}$ auf $[0, T^*]$ zu erbringen. Sei nun $1 > \epsilon > 0$ fest vorgegeben. Dann gilt

$$A_{p_0}^{1-\epsilon}u(t) = A_{p_0}^{1-\epsilon}\exp(-tA_{p_0})\varphi + \int_0^t A_{p_0}^{1-\epsilon}\exp(-(t-s)\,A_{p_0})\,f(u(s))\,ds.$$

Nach Lemma 2(2) gilt nun

$$\| A_{p_0}^{1-\epsilon}\exp(-(t-s)\,A_{p_0})\|_{\mathscr{L}(L^{p_0})} \leqslant \tilde{c}\,|t-s|^{\epsilon-1}$$

und damit

$$\| A_{p_0}^{1-\epsilon}u(t)\|_{L^{p_0}} \leqslant \| A_{p_0}^{1-\epsilon}\exp(-tA_{p_0})\varphi\|_{L^{p_0}} + \tilde{c}\int_0^t |t-s|^{\epsilon-1}\|f(u(s))\|_{L^{p_0}}\,ds.$$

Es gilt nun

$$\|f(u)\|_{L^{p_0}} \leqslant c_9(\|u\|_{L^{p_0}} + \|u\|_{L^{p_0\tilde{p}(\rho-1)}}^{\rho-1}\|u\|_{L^{p_0\tilde{q}}}).$$

Dabei sei für $n > 2m$,

$$\frac{1}{\tilde{p}} = \frac{p_0(\rho-1)(n-2m)}{2n} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\tilde{q}} = 1 - \frac{1}{\tilde{p}} = \frac{2n - p_0(\rho-1)(n-2m)}{2n},$$

$p_0 = n/2m$. Unter obiger Voraussetzung an ρ ist dann

$$\frac{1}{\tilde{q}} > \frac{2n - p_0(n-2m)^{-1}4m(n-2m)}{2n} = 0,$$

also gilt $1 < \tilde{p}, \tilde{q} < \infty$, und weiter ist

$$\frac{1}{p_0\tilde{p}(\rho-1)} = \frac{1}{2} - \frac{m}{n}, \qquad \text{somit} \qquad D(A_2^{1/2}) = H^{m,2}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p_0\tilde{p}(\rho-1)}(\mathbb{R}^n).$$

Damit folgt

$$\|f(u)\|_{L^{p_0}} \leqslant c_{10}(\|u\|_{L^{p_0}} + \|u\|^{\rho-1}_{H^{m,2}} \|u\|_{L^{p_0\tilde{q}}}).$$

Es ist nun

$$\frac{1}{p_0\tilde{q}} = \frac{1}{p_0} - \frac{(\rho-1)(n-2m)}{2n}.$$

Nach Lemma 1(1) ist dann $W^{(\rho-1)(n-2m)/2,p_0} \subset L^{p_0\tilde{q}}$ und nach Lemma 3 $D(A_{p_0}^{1-\epsilon}) \subset W^{(\rho-1)(n-2m)/2,p_0}$ für hinreichend kleines ϵ, da $(\rho-1)(n-2m)/2 < 2m$. Damit gilt

$$\|f(u)\|_{L^{p_0}} \leqslant c_{11}(\|u\|_{L^{p_0}} + \|u\|^{\rho-1}_{H^{m,2}} \|u\|_{W^{(\rho-1)(p-2m)/2,p_0}})$$

$$\leqslant c_{12}(\|A_{p_0}^{1-\epsilon}u\|_{L^{p_0}} + \|A_2^{1/2}u\|^{\rho-1}_{L^2} \|A_{p_0}^{1-\epsilon}u\|_{L^{p_0}}).$$

Nach Lemma 6 folgt damit

$$\|A_{p_0}^{1-\epsilon}u(t)\|_{L^{p_0}} \leqslant c_{13}\left(1 + \int_0^t |t-s|^{\epsilon-1} g_7(s) \|A_{p_0}^{1-\epsilon}u(s)\|_{L^{p_0}}\, ds\right)$$

mit einer Funktion $g_7(\cdot) \in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.

Hieraus folgt in bekannter Weise

$$\|A_{p_0}^{1-\epsilon}u(t)\|_{L^{p_0}} \leqslant g_8(t) \in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$$

für $n > 2m$, $p_0 = n/2m$.

Im Falle $n \leqslant 2m$ wähle man $\bar{p}$ hinreichend groß und $\tilde{q} > 1$ nahe bei 1. Wegen $H^{m,2} \subset L^{\bar{p}\tilde{p}(\rho-1)}$ und $D(A_{\bar{p}}^{1-\epsilon}) \subset W^{2m(1-2\epsilon),\bar{p}} \subset L^{\bar{p}\tilde{q}}$ folgt eine a priori Abschätzung für $\|A_{\bar{p}}^{1-\epsilon}u(t)\|_{L^{\bar{p}}}$, $2 \leqslant \bar{p} < \infty$, $1 > \epsilon > 0$. Im nächsten Schritt soll die L^{p_1}-Norm von $A_{p_1}^{1-\epsilon}u(t)$ für $p_1 > n/2m$, $n > 2m$, abgeschätzt werden.

Wir erhalten wieder

$$\|A_{p_1}^{1-\epsilon}u(t)\|_{L^{p_1}} \leqslant \|A_{p_1}^{1-\epsilon}\exp(-tA_{p_1})\varphi\|_{L^{p_1}} + c_{14}\int_0^t |t-s|^{\epsilon-1} \|f(u(s))\|_{L^{p_1}}\, ds$$

und

$$\|f(u)\|_{L^{p_1}} \leqslant c_{15}(\|u\|_{L^{p_1}} + \|u\|^{\rho-1}_{L^{p_1\tilde{p}_1(\rho-1)}} \|u\|_{L^{p_1\tilde{q}_1}}).$$

Dabei sei

$$\frac{1}{p_1\tilde{p}_1(\rho-1)} = \frac{1}{p_0} - \frac{2(m-2\epsilon)}{n} = \frac{n-2mp_0+4p_0\epsilon}{p_0 n} = \frac{4\epsilon}{n},$$

d.h. $1/\tilde{p}_1 = (4/n)\,\epsilon p_1(\rho-1)$.

Damit ist nach Lemma 1 $W^{2(m-2\epsilon),p_0} \subset L^{p_1\tilde{p}_1(\rho-1)}$ und weiter nach Lemma 3, $D(A_{p_0}^{1-\epsilon}) \subset W^{2(m-2\epsilon),p_0}$. Somit wird

$$\| f(u)\|_{L^{p_1}} \leqslant c_{16}(\| A_{p_1}^{1-\epsilon} u \|_{L^{p_1}} + \| A_{p_0}^{1-\epsilon} u \|_{L^{p_0}}^{\rho-1} \| u \|_{L^{p_1\tilde{q}_1}}).$$

Nun ist $1/\tilde{q}_1 = 1 - (1/\tilde{p}_1) = 1 - (4/n)\,\epsilon p_1(\rho - 1)$ und damit $1/p_1\tilde{q}_1 = (1/p_1) - (4/n)\,\epsilon(\rho - 1)$, also $W^{4\epsilon(\rho-1),p_1} \subset L^{p_1\tilde{q}_1}$. Da $D(A_{p_1}^{1-\epsilon}) \subset W^{4\epsilon(\rho-1),p_1}$ gilt, so ist

$$\| f(u)\|_{L^{p_1}} \leqslant c_{17}(\| A_{p_1}^{1-\epsilon} u \|_{L^{p_1}} + \| A_{p_0}^{1-\epsilon} u \|_{L^{p_0}}^{\rho-1} \| A_{p_1}^{1-\epsilon} u \|_{L^{p_1}}) .$$

Also,

$$\| A_{p_1}^{1-\epsilon} u(t)\|_{L^{p_1}} \leqslant c_{18} \left(1 + \int_0^t | t - s |^{1-\epsilon}(1 + g_8(s))^{\rho-1} \| A_{p_1}^{1-\epsilon} u(s)\|_{L^{p_1}} ds\right).$$

Damit folgt

$$\| A_{p_1}^{1-\epsilon} u(t)\|_{L^{p_1}} \leqslant h_{p_1}(t) \in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$$

für $p_1 > n/2m$, $n > 2m$. Wegen $D(A_{p_1}^{1-\epsilon}) \subset W^{2m(1-2\epsilon),p_1} \subset W^{2m-1,\infty} = H^{2m-1,\infty}$ nach Lemma 1(2), da $2m - 1 < 2m(1 - 2\epsilon) - (n/p_1) = 2m - 4m\epsilon - (n/p_1)$ für $p_1 > 2n$ und $\epsilon < 1/8m$, ist

$$\| u(t)\|_{H^{2m-1,\infty}} \leqslant g_9(t) \in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+).$$

Durch Anwendung der Kettenregel ergibt sich dann sofort eine a priori Abschätzung von $\|f(u)\|_{H^{k,p}}$ für $k \leqslant 2m - 1$ und damit

$$\| A_p^{(3/2)-\epsilon} u(t)\|_{L^p} \leqslant \| A_p^{(3/2)-\epsilon} \exp(-tA_2)\varphi \|_{L^p} + c_{19} \int_0^t | t - s |^{1-(\epsilon/2)} \| A_p^{(1/2)-(\epsilon/2)} f(u(s))\|_{L^p} ds.$$

Wegen Lemma 3 ist

$$\| A_p^{(1/2)-(\epsilon/2))} f(u(s))\|_{L^p} \leqslant c_{20} \| f(u(s))\|_{H^{m,p}} \leqslant c_{20} \| f(u(s))\|_{H^{2m-1,p}}$$

und damit

$$\| A_p^{(3/2)-\epsilon} u(t)\|_{L^p} \leqslant c_{21} \left(1 + \int_0^t | t - s |^{1-\epsilon} g_{10}(s)\, ds\right) \leqslant g_{11}(t) \in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+).$$

Angenommen, man habe schon

$$(*) \qquad \| A_p^{(l/2)-\epsilon} u(t)\|_{L^p} \leqslant j_l(t) \in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$$

für ein $l \in [3, 2(k+1)]$ gezeigt, so folgt

$$\| A_p^{[(l+1)/2]-\epsilon} u(t)\|_{L^p} \leqslant \| A_p^{[(l+1)/2]-\epsilon} \exp(-tA_2)\varphi \|_{L^p}$$
$$+ c_{22} \int_0^t | t-s |^{1-(\epsilon/2)} \| A^{[(l-1)/2]-(\epsilon/2)} f(u(s))\|_{L^p} \, ds.$$

Dann ist wegen (*) und $D(A_p^{(l/2)-\epsilon}) \subset W^{lm-3m\epsilon,p} \subset W^{lm-1,\infty} = H^{lm-1,\infty}$ nach Lemmata 1(2) und 3, da $lm - 3m > (n/p) + lm - 1$ für $p > n$ und ϵ hinreichend klein:

$$\begin{aligned} \| A_p^{[(l-1)/2]-(\epsilon/2)} f(u(s))\|_{L^p} &\leqslant c_{23} \| f(u(s))\|_{H^{(l-1)m,p}} \\ &\leqslant c_{23} \| f(u(s))\|_{H^{lm-1,p}} \\ &\leqslant \tilde{j}_l(t) \in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) \end{aligned}$$

und folglich ist

$$\| A_p^{[(l+1)/2]-\epsilon} u(t)\|_{L^p} \leqslant \tilde{\tilde{j}}_l(t) \in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+).$$

So erhält man schließlich die gewünschte a priori Abschätzung für $\| A_p^{k+1} u(t)\|_{L^p}$.

COROLLAR. *Die Lösung von Satz* 3 *ist in* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ *stetig differenzierbar.*

Zusatz bei der Korrektur. Es reicht aus, statt von $W^{N,p} = H^{N,p}$ nur von der Inklusion $W^{N+\epsilon,p} \subset H^{N,p} \subset W^{N-\epsilon,p}$ ($N \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\epsilon > 0$) (siehe [8]) Gebrauch zu machen.

LITERATUR

1. F. E. BROWDER, On the spectral theory of elliptic differential operators I, *Math. Ann.* **142** (1961), 22–130.
2. P. L. BUTZER AND H. BERENS, "Semi-groups of Operators and Approximation," Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.
3. A. FRIEDMAN, "Partial Differential Equations," Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.
4. E. HEINZ, Über die Regularität der Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. II*, Nr. 2 (1975), 15–26.
5. H. KIELHÖFER, Halbgruppen und semilineare Anfangs-Randwertprobleme, *Manuscripta Math.* **12** (1974), 121–152.
6. H. KIELHÖFER, Existenz und Regularität von Lösungen semilinearer parabolischer Anfangs-Randwertprobleme, *Math. Z.* **142** (1975), 131–160.

7. O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva, "Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type," Amer. Math. Soc. Transl. of Math. Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.
8. J. Peetre, Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **16** (1966), 279–317.
9. P. E. Sobolevskii, Equations of parabolic type in Banach space, *Amer. Math. Soc. Transl., Ser.* 2 **49** (1966), 1–62.
10. W. v. Wahl, Klassische Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen im Großen, *Math. Z.* **112** (1969), 241–279.
11. W. v. Wahl, Gebrochene Potenzen eines elliptischen Operators und parabolische Differentialgleichungen in Räumen hölderstetiger Funktionen, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* **11** (1972), 231–258.
12. W. v. Wahl, Lineare und semilineare parabolische Differentialgleichungen in Räumen hölderstetiger *Funktionen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, erscheint demnächst.
13. W. v. Wahl, Neue Resolventenabschätzungen für elliptische Differentialoperatoren und semilineare parabolische Gleichungen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, erscheint demnächst.
14. W. v. Wahl, Starke Lösungen semilinearer parabolischer Differentialgleichungen, *Math. Z.*, erscheint demnächst.
15. W. v. Wahl, Über semilineare elliptische Gleichungen mit monotoner Nichtlinearität, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. II*, erscheint demnächst.